XIII.

Le superficie si possono considerare sotto due aspetti assai differenti, cioè o come limiti di solidi, o come solidi flessibili ed inestendibili, una delle cui dimensioni si riguardi come evanescente *).

Quando si adotta questo secondo punto di vista, le proprietà delle superficie vengono a dividersi in due classi : l'una comprende quelle proprietà che sono essenzialmente connesse colla forma speciale che si attribuisce attualmente alla superficie considerata, e che si modificano insieme con essa; all'altra classe appartengono invece quelle proprietà che sussistono indipendentemente da ogni particolare determinazione della forma stessa. Queste ultime possono chiamarsi assolute, le prime relative. Così, a cagion d'esempio, il celebre teorema di GAUSS, relativo alla conservazione della curvatura, esprime una proprietà assoluta la quale, e per la generalità di cui è dotata, e per la vasrità delle ricerche a cui apre la via, merita certamente di essere riguardata come una delle più importanti conquiste dell'analisi moderna.

Allorché si considerano le superficie sotto questo secondo aspetto, l'ordinaria rappresentazione cartesiana rendesi poco opportuna, siccome quella che è troppo intimamente connessa colla posizione e colla figura attuale della superficie. Quando questa viene considerata come flessibile ed inestendibile, ciò che rimane inalterato è la lunghezza di ciascun elemento lineare, e tutte le proprietà assolute non possono essere che conseguenze di questa inalterabilità. Quindi, nell'ordine delle ricerche di cui vogliamo ora occuparci, la superficie è perfettamente definita dall'espressione del suo elemento lineare, il cui quadrato ha la forma

(34) Edu^2-\~ 2Fdudv + Gdv\

ed in cui le E, F, G hanno il significato con cui si sono già usate nell'art. III. Le due indeterminate u e v, che fanno l'ufficio di variabili indipendenti, sono denominate coordinate curvilinee perché, come è notissimo, possono riguardarsi come i parametri di due famiglie di curve tracciate sulla superficie, dall'intersezione delle quali vengono individuati i punti della superficie stessa.

Tutte quelle superficie il cui elemento lineare è rappresentato dalla medesima espressione (34) sono riguardate, nel presente ordine di ricerche, come identiche fra loro. Ma non sussiste la proprietà reciproca: le tre funzioni E, F, G possono essere

*) GAUSS, Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. XIII.
CASORATI, Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve [Annali di Matematica pura ed applicata, t. Ili (1860), pag. 363, t. IV (i861), pag. 177].